Thomas Bugge "De første grunde til Regning, Geometrie, Plan-Trigonometrie og Landmaaling". Kiøbenhavn 1795.

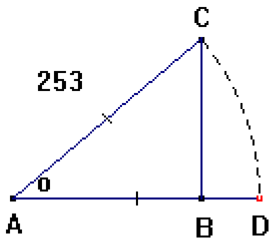
Andet Kapitel.

Opløsning af retvinklede Triangler.

---

§ 13

Tab.16.
Fig.253.



Naar der i en retvinklet Triangel ABC gives Hypothenusen AC, og en af de spidse Vinkler A, da findes den Side CB, som staaer lige over for den spidse Vinkel A ved følgende Forhold: som Sinus totus til Hypothenusen AC, saaledes Sinus af den spidse Vinkel A til den modstaaende Side CB, eller

R : AC = sin.A : CB.[0]

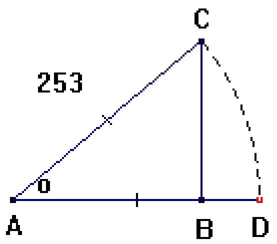
Man antager AC som Radius, og fra A som Center beskriver man Buen CD, og forlænger AB til D, saa er AC = R = sin.tot. og CB = sin.A (§.2); altsaa R : AC = sin.A : CB
f.Ex. AC = 2360 Alen [1] A = 34^0.20´. [2]

[3] Log.2360 = 3.3729120
Log.sin.34^0 20 = 9.7512842
13.1241962
Log.sin.tot. = 10.0000000
Log.CB = 3.1241962
CB = 1331,5 Alen

***Anmærkning**. Aarsagen til denne Fremgangsmaade med Logarithmerne er forklaret i Arithmetiken, nemlig CB = ACHsin.A / R ; og naar man bruger Logarithmer, som forvandle Multiplication til Addition, og Division til Subtraktion, er log.CB = log.AC + log.sin.A - log.R (§.116 Arith[4]). I foregaaende Exempel er Regningen fremsat fuldstændigen, men log.R eller log.sin.tot. = 10.0000000, hvis Subtraktion skeer ved at subtrahere 10 fra Summens Karakteristika , og denne Subtraktion skal herefter tilkiendegives ved at overstrege Tallet af Tiernes Orden [5].*

§ 14

Tab.16.
Fig.253.



Naar i en retvinklet Triangel ABC gives Hypothenusen AC, og en af Catheterne AB, da findes den Vinkel A, som ligger ved denne Cathet, ved følgende Forhold: Som AC til AB saaledes Sinus Totus til Cosinus af A, eller

AC : AB = sin.tot. : cos.A.

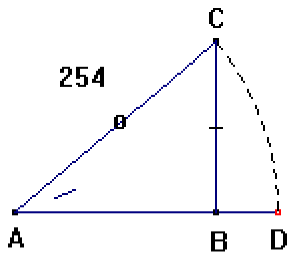
Naar man fra A som center slaaer Buen CD med Radius AC, saa er AC = R = sin.tot.; og AB = cos.A (§.3); altsaa AC : AB = R : cos.A.

F.Ex. AC = 4000 Alen; AB = 2000 Alen.

Log.Sin.Tot. = 10.0000000
Log.2000 = 3.3010300
13.3010300
Log.4000 = 3.6020600
Log.Cos.A = 9.6989700
A = 60^0.

§ 15

Fig.254.



Naar i en retvinklet Triangel gives en spids Vinkel A, og den lige over for staaende Cathet BC, da findes Hypothenusen AC ved følgende Forhold: Som Sinus af A til BC, saaledes Sinus Totus til Hypothenusen AC, eller

sin.A : BC = R : AC.

Beviset er klart af §.13, af hvilken denne Forhold ikkun er en anden Omsætning.

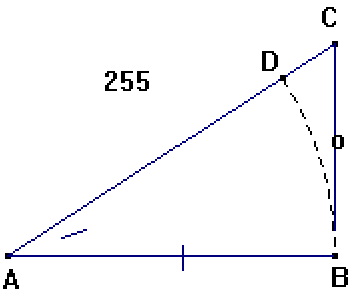
F.Ex. BC = 4524 Alen; A = 54^0 20′

Sin.Tot. = 10.0000000
Log.4524 = 3.6555226

13.6555236
$\underline{\text{Log.Sin.}54^0\ 20' = 9.9097821}$
Log.AC = 3.7457405
AC = 5568,6 Alen.

§ 16

Fig.255.



Naar en af Catheterne AB og den ved samme liggende spidse Vinkel A gives, da findes den anden Cathet BC ved følgende Forhold: Som Sinus Totus til Tangens af A, saaledes AB til BC, eller R : Tang.A = AB : BC.

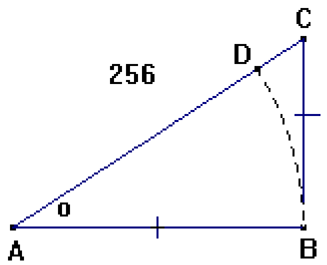
Af A som Center med Radius AB beskrives en Bue, saa er AB = R = sin.tot.; og BC = Tang.A (§.4); altsaa R : Tang.A = AB : BC. [6)]

F.Ex. AB = 46836 Alen; $A = 41^0\ 40'\ 20''$

Log.Tang. $41^0\ 40'\ 20'' = 9.9494379$
$\underline{\text{Log.}46836 = 4.6705798}$
Log.BC = 4.6200177
BC = 41688,6 Alen.

§ 17

Tab.17.
Fig.256.



Naar begge Catheterne AB og BC gives, da findes den spidse Vinkel A ved følgende Forhold: som AB til BC, saaledes Sinus Totus til Tangens A, eller

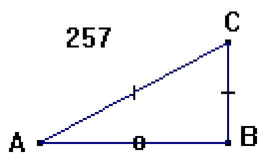
AB : BC = R : Tang.A.

Denne Sætning er den omvendte af den foregaaende (§.16).
F.Ex. AB = 500 Fod; BC = 896 Fod.

Log.Sin.Tot = 10.0000000
Log.896 = 2.9523080
12.9523080
Log.500 = 2.6989700
Log.Tang.A = 10.2533280
$A = 60^0\,40'\,13''$ [7)]

§ 18

Tab.17.
Fig.257.



Naar i en retvinklet Triangel gives Hypothenusen AC og den ene Cathet BC, at finde den anden Cathet AB.

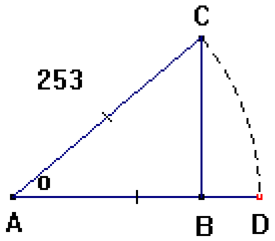
1. Man søger Vinkelen A ved følgende Forhold: AC : R = CB : sin.A (§.12.15).
2. Naar man saaledes har fundet Vinkelen A, søges AB ved følgende Forhold: R : cos.A = AC :AB (§.15).

F. Ex. AC = 6250 Alen, BC = 1240 alen.

AC : R = CB : sin.A
6250 : R = 1240 : sin.A
Log.sin.tot. = 10.0000000
Log.1240 = 3.0934217
13.0934217
Log.6250 = 3.7958800
Log.sin.A = 9.2975417
$A = 11^0\,26'\,36''$
Fremdeles R : cos.A = AC : AB
$R : \cos.11^0\,26'\,37'' = 6250 : AB$
Log.6250 = 3.7958800
$\cos.11^0\,26'\,37 = 9.9912803$
Log.AB = 3.7871603
AB = 6125,8 Alen. [8)]

§ 19

Fig.253.



Naar i en retvinklet Triangel gives begge Catheterne AB og BC, at finde Hypothenusen AC.

1. Man søger Vinkelen A ved følgende Forhold, AB : BC = R : tang.A (§.17).

2. Naar man har fundet Vinkelen A, findes Hypothenusen ved følgende Forhold: sin.A : BC = R : AC (§.15).

F.eks., AB = 300 Fod; BC = 400 Fod

AB : BC = R : tang.A
300 : 400 = R : tang.A
Log.400 + Log.R = 12.6020600
Log.300 = 2.4771213
Log.tang.A = 10.1249387
A = $52^0.7'.48''$
sin.A : BC = R : AC
sin.$53^0.7'.50''$: 400 = R : AC
Log.400 + R = 12.6020600
Log.sin.53.7.48 = 9.9030894
Log.AC = 2.6989706
AC = 500 Fod.[9]

Anmærkning. *Dette sidste Probleme kan ved Geometrie opløses; thi $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (§.93 geom.[10]), og $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$; og i det givne Exempel $AC = \sqrt{300^2 + 400^2} = \sqrt{90000 + 160000} = \sqrt{250000} = 500$. Det nest foregaaende Probleme (§.18) kan og opløses efter den Pythagoræiske Læresætning; og $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$, hvilket Udtryk kan opløses ved Logarithmer, naar man forudsætter det, som siden i Bogstavregningen (§.8 Algr.) skal bevises, at $AC^2 - BC^2 = (AC + BC)(AC - BC)$; thi da bliver AB udtrykt ved Logarihtmer, eller log.AB = (log.(AC + BC) + log.(AC-BC)) / 2 (§.113 Arith.[11]). Det i §.18 anførte Exempel vil da efter denne Regnemaade saaledes udfalde:*

AC = 6250	*AC = 6250*
BC = 1240	*BC = 1240*
AC + BC = 7490	*AC - BC = 5010*

log.(AC + BC) = log.7490 = 3.8744818
log.(AC - BC) = log.5010 = 3.6998377
log.($AC^2 - BC^2$) = log.(7490H5010) = 7.5743195
log.AB = ½ l.($AC^2 - BC^2$) = ½ l.(7450H5010) = 3.7871598

AB = 6125,7 [12)]

Den ubetydelige Forskiel, som findes imellem denne Logarithme og Logarithmen i §.18, har sin Oprindelse af Uvisheden i Logarithmernes sidste Decimal; og om man ville have den nøiere, da maae man bruge Logarithmer med flere Decimaler (§.112 Arith.)

§ 20

Disse Problemer ere Grunden til alle retvinklede Trianglers Opløsninger, hvilken ved de givne Exempler tilstrekkeligen ere oplyste. Alle muelige Tilfælde, hvilke kan indtreffe ved retvinklerde Triangler, ere i alt 21, og indbefattes i følgende Tavle, hvortil hører en af Figurerne fra 252 til 258.

Til-Fæl-De	Givne Ting	Søgte Ting	Forholden eller Regnings-Reglen.
1	AB, BC	AC	AB : BC = R : tang.A og sin.A : BC = R : AC (§.19)
2		A	AB : BC = R : tang.A (§.17)
3		C	BC : AB = R : tang.C (§.17)
4	AB, AC	BC	l.BC = ½ l.(AC+AB)+½ l.(AC-AB) (§.19)
5		A	AC : AB = R : cos.A (§.14)
6		C	AC : AB = R : sin.C (§.13)
7	AC, BC	AB	l.AB = ½ l.(AC+BC) + ½ l.(AC-BC) (§.19)
8		A	AC : R = BC : sin.A (§.13)
9		C	AC : BC = R : cos.C (§.14)
10	AB, A	BC	R:tang.A = AB : BC (§.17)
11		AC	cos.A : R = AB : AC (§.14)
12	AB, C	BC	tang.C : R = AB : BC (§.17)
13		AC	sin.C : AB = R : AC (§.13)
14	BC, A	AB	tang.A : R = BC : AB (§.17)
15		AC	sin.A : BC = R : AC (§.13)
16	BC, C	AB	R: tang.C = BC : AB (§.17)
17		AC	cos.C : R = BC : AC (§.14)
18	AC, A	AB	R : cos.A = AC : AB (§.14)
19		BC	R : AC = sin.A : BC (§.13)
20	AC, C	AB	R : AC = sin.C : AB (§.13)
21		BC	R : cos.C = AC : BC (§.14)

Noter:

0) Bemærk at R / AC = sin $_R$(A) / CB kan omskrives til sin $_R$ (A) / R = CB / AC.
   Derfor kan man uden fejl (se §2 kommentar) sætte R = 1 og dermed CB = sin(A) H AC / 1.
   Dette gøres i udregningen uden kommentar, idet man sætter sin.tot. = R = 1 og log.sin.tot = 0.

1) Målestoksforhold:
   1 Fod = 10 decimaltommer = 100 decimallinier = ½ Alen.1 Alen = 62.8 cm.

2) Vinkelmål :
En hel cirkel deles i 360^0.
Hver grad deles i 60 bueminutter (skrives 60´) og hvert bueminut deles i 60 buesekunder (skrives 60´´).
F.eks. betyder 20^0 13´45 ´´ : 20 grader, 13 minutter og 45 sekunder
Eksempel på omregning:

$$20^0\ 13'\ 45'' = 20 + 13 / 60 + 45 / 60^2 = 22.2291667^0.$$

Tilbageskrivningen 22.2291667^0 ser sådan ud:

22.2291667 - 22 = 0.2291667 (*træk heltalsværdien fra)*
0.2291667H60 = **13**.75000 *(multiplicer med 60)*
13.75000 - 13 = 0.7500 *(træk heltalsværdien fra)*
0.7500 H 60 = **45**.000 *(multiplicer med 60)*

3) se Beregning med logaritmer
4) *§ 116 Arith:*
Til trende givne Tal a, b, c at finde det fierde proportional [13)] Tal d ved Logarithmer.
1. Man søger af Tavlerne Logarithmerne til de tvende mellemste, eller til den anden og tredje b og c, og lægger disse Logarithmer tilsammen = Log.b + Log.c.
2. Fra denne Summa drages Logarithmen af den første a; saa er det udkommende Logarithmen til det fierde proportional Tal d, eller Log.d = log.b + log.c - log.a. …….
5) Bemærk at R / $\tan_R$ (A) = 1 / tang (A) (se bemærkning til §2). Derfor kan man uden videre i Udregningerne sætte R = 1.
6) Log.sin.34^0 20´= -0.2487158 = 9.7512842 - 10
Udregningen kan også skrives sådan:

Log.2360 = 3.3729120
Log.sin.34^0 20 = 9.7512842 - 10
13.1241962 - 10
Log.sin.tot. = 10.0000000 -10
Log.CB = 3.1241962

Log.CB = 3.1231962 fås ved "at strege 10érnes orden" i 13.1241962 ud.

7) I de sidste to linier skal der stå: Log.Tang.A =10.2533**3**80
A = 60^0 **50**´13´´
8) I de sidste 6 linier skal der stå : R : cos.11^0 26´ 3**6**´´ = 6250 : AB
Log.6250 = 3.795880
Log.cos.11^0 26´ 37 = 9.9912**799**
Log.AB = 3.7871**599**
AB = 6125,8 Alen

9) Der skal stå: A = 5**3**^{0} 7´ 48´´ og Log.400 + **Log.**R = 12.6020600
10*) § 93 Geom:*
I enhver retvinklet Triangel ABC er det Qvadrat AE, som beskrives paa Hypotenusen AB, saa stor som begge Qvadraterne GB + AH, hvilke beskrives paa Catheterne , eller $AB^2 = BC^2 + AC^2$. …….
11) *§ 113 Arith*:
Logarithmen til et Produkt ab findes ved at lægge Logarithmerne af begge Faktorerne a og b tilsammen eller Log.ab = Log.a + Log.b. ……

12) Resultatet bliver AB = 6125.757 så det burde rundes op til 6125.8. der er altså ikke nogen "ubetydelig feil".

13) *Fierde proportional*: I ligningen (proportionen) a:b = c:d siges d at være fjerdeproportional til a, b, c.