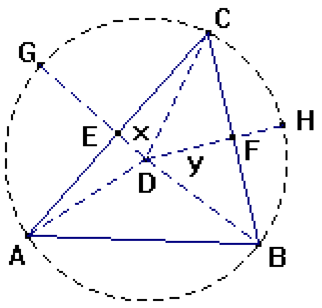
Thomas Bugge "De første grunde til Regning, Geometrie, Plan-Trigonometrie og Landmaaling". Kiøbenhavn 1795.

Tredje Kapitel

Skievvinklede Trianglers Opløsning

§ 21

Tab.17.
Fig.259.

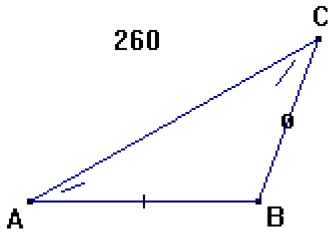


I enhver retlinet flad Triangel ABC forholde sig Siderne AC og BC som Sinus af de modstaaende Vinkler, det er, som Sinus af B til Sinus af A, eller AC : BC = sin.B : sin.A.

Den givne Triangel ABC indskrives i en Cirkel, hvis Center er D. Derfra drager man paa Chorderne [1)] AC og BC Perpendikularerne [2)] DE og DF. Disse skiære saavel Chorderne som Buerne i lige Dele (§.108 Geom [3)]); saa at 2 CE = AC, og 2 BF = CB; ligeledes x = ½ ADC, og y = ½ BDC; nu er den hele Vinkel ved Peripherien saa stor som den halve Center-Vinkel (§.121 Geom.[4)]), eller ½ ADC = B og ½ BDC = A; hvoraf følger, at x = B og y = A. Af de Trigonometriske Liniers Natur er det klart, at CE er Sinus til x, og BF til y (§.2); eller BF = sin.y = sin.A, og CE = sin.x = sin.B; altsaa sin.B : sin.A = CE : BF = 2 CE : 2 BF = AC : CB.

§ 22

Fig.260.



Naar i en skievvinklet Triangel gives en Side AB, og Vinkelen C lige over for Siden AB, og desuden en af vinklerne A ved samme Side, at finde den lige over for staaende Side BC.

Man opsætter følgende Forhold: som sinus af Vinkelen C til den modstaaende Side AB, saaledes Sinus af den anden givne Vinkel A til sin modstaaende Side BC, eller

sin.C : AB = sin.A : BC (§.21).

F.Ex. AB = 2354 Alen [5], $A = 32^0\ 20'$, $C = 50^0\ 34'$ [6],

$\text{Sin.}50^0\ 34' : 2354 = \text{sin.}32.\ 20 : BC$

Log.2354 = 3.371806 [7]

$\underline{\text{Log.sin.}32^0\ 20' = 9.728227}$

13.100033

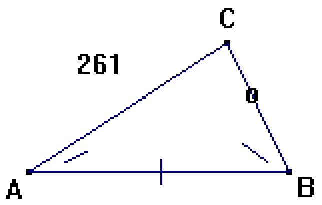
$\underline{\text{Log.sin.}\ 50^0\ 34' = 9.887822}$

Log.BC = 3.212211

BC = 1630,1 Alen.

§ 23

Fig.261.



Dersom der gives Grundlinien AB, og begge Vinklerne ved Grundlinien A og B, da at finde tvende Sider BC og AC.

1. Ved at lægge begge Vinklerne ved Grundlinien A og B sammen, og ved at drage dem fra tvende rette Vinkler alle 180^0, finder man Vinkelen C, som staaer lige over for Grundlinien AB (§.67 Geom.[8])

2. Da har man samme givne Ting, som i §.22, og altsaa sin.C : AB = sin.A : BC, og sin.C : AB = sin.B : AC.

F.Ex. AB = 10070 Alen, $A = 57^0\ 54'\ 45''$ og $B = 53^0\ 14'\ 3''$; saa søger man først Vinkelen C.

$A = 57^0\ 54'\ 45''$

$\underline{B = 53\ \ 14 : 3}$

A + B = 111. 8. 48

$\underline{A + B + C = 179.\ 59.60 = 180^0}$

C = 68. 51. 12

sin.C : AB = sin.A : BC

$\text{sin.}\ 68^0\ 51'\ 12'' : 10070 = \text{sin.}57^0\ 54'\ 45'' : BC$

log.10070 = 4.0030295

$\underline{\text{log.sin.}\ 57.54.45 = 9.9280053}$

13.9310348

$\underline{\text{log.sin.}86.51.12 = 9.9697233}$

log.BC = 3.9613115

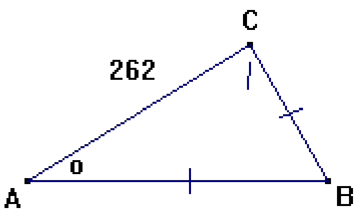
BC = 9147,7 Alen

$\text{sin.}68^0\ 51'\ 12'' : 10070 = \text{sin.}\ 53^0\ 14'\ 3'' : AC$

log.10070 = 4.0030295
log.sin. 53^0 14´ 3´´ = 9.9036804
13.9067099
log.sin.68.51.12 = 9.9697233
log.AC = 3.9369866
AC = 8649,4

§ 24

Fig.262.



Naar i en Triangel ABC gives tvende Sider AB og BC, og en Vinkel C lige over for den ene givne Side AB, da at finde den Vinkel A, som staaer lige over for den anden givne Side BC.

Man finder Vinkelen A ved følgende Forhold:

AB : sin.C = CB : sin.A.

F.Ex. AB = 25394 Alen; C = 56^0 30´; CB = 4876 Alen.

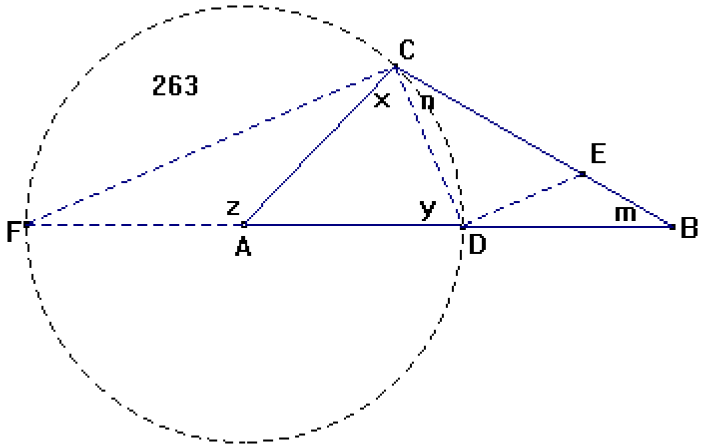
5394 : sin.56^0 30´ = 4876 : sin.A

log.4876 = 3.688064
log.sin.56^0 30´= 9.921107
13.609171
log.5394 = 3.731911
log.sin.A = 9.877260
A = 48^0 55´ 16´´

Anmærkning. Naar man saaledes har fundet Vinkelen A, og man tager Summen eller A + C fra 180^0, har man den tredie Vinkel B (§.67 Geom.[8)]); og da kan man deraf søge den tredie Side AC, nemlig sin.C : AB = sin.B : AC (§.22.). Paa den Maade har man fundet alle Vinkler og Sider i Trianglen ABC; i øvrigt kan man lægge Mærke til, at naar man vil søge en Vinkel, begynder Forholden med en Side, og naar man vil søge en Side, begynder Forholden med en Vinkel.

§ 25

Tab.17.
Fig.263.



Naar der ere tvende ulige Størrelser M = 8 og m = 2, og man ved deres Summe S = M + m = 10, og deres Difference D = M - m = 6, saa er den større M lige stor med den halve Summe tilligemed den halve Difference, eller M = ½ S + ½ D = 10/2 + 6/2 = 5 + 3 = 8; og den mindre Størrelse er den halve Summe mindre end den halve Difference, eller m = ½ S - ½ D = 10/2 - 6/2 = 5 - 3 = 2.

1. S = M + m og D = M - m; disse lægges sammen, saa er S = D = 2 M + m - m = 2 M, fordi + m, som er lagt til, nødvendigen tilintetgøres eller hæves ved - m, som er subtraheret; man dividerer med 2, saa er M = ½ S + ½ D.

2. M + m = S; isteden for M sættes dens Værdie = ½ S + ½ D; altsaa ½ S + ½ D + m = S; man fradrager ½ S paa begge Sider, saa er ½ D + m = S - ½ S = ½ S; man fradrager ½ D paa begge Sider, saa er endeligen m = ½ S - ½ D.

§ 26

Fig.263.

Naar udi en Triangel ABC gives tvende Sider AB og AC, og den af dem indbefattede Vinkel BAC eller A, da at finde de øvrige Vinkler ved C og B.

1. Man lægger begge de givne Sider sammen, og finder deres Summa AB + AC.

2. Man tager dem fra hinanden, og finder deres Difference AB - AC.

3. Man tager den givne Vinkel A fra 180^0, saa har man Summen af de tvende ubekiendte Vinkler C + B (§.66 Geom. [9)])

4. Man giør følgende Forhold som Summen af Siderne AB + AC til deres Forskiel AB - AC, saaledes Tangens af de ubekiendte Vinklers halve Summer til Tangens af disse Vinklers halve Difference, eller AB + AC : AB - AC = tang.½(C + B) : tang.½(C - B).

5. Naar man saaledes har fundet de ubekiendte Vinklers halve Difference ½ C - ½ B; lægger man til deres halve Summe ½ C + ½ B den halve Difference ½ C - ½ B, saa har man den større af de søgte Vinkler C; og naar man fra den halve Summe ½ C + ½ B tager den halve Difference ½ C- ½ B, har man den mindre af de ubekiendte Vinkler = B (§.25.).

Beviis. Det som behøver Beviis i denne Opløsning, er den under Num. 4 anførte Forhold, hvilken saaledes bevises. Fra A, som Center, og med den mindre Side AC, som Radius, beskriver man en Cirkel, saa er BF Summen af de givne Sider AB og AC, thi BF = AB + AF = AB + AC (§.14 Geom.[10]), og DB er de givne Siders Difference; thi DB = AB - AD = AB - AC. Man drager FC og CD, samt DE parallel med FC (§.65 Geom.[11]). Da AC = AD, saa er x = y (§.39 Geom.[12]); men y = m + n (§.66 Geom. [9]), altsaa x = m + n. Først fradrages m paa begge sider, og x - m = n, dernæst lægges n til paa begge Sider, saa er x + n - m = 2 n; men x + n = ACB = C og m = ABC = B, altsaa C - B = 2 n; og ½ C - ½ B = n, eller n er de ubekiendte Vinklers halve Difference. Fremdeles er z = ACB + ABC (§.66 Geom. [9]) = 2 y, og ½ z = y; altsaa ½ z = y = ½ ACB + ½ ABC = ½ C + ½ B, eller y er de ubekiendte Vinklers halve Summe. Videre da Vinkelen FCD er en Vinkel i en halv Cirkel, saa er FCD = 90^0 (§.122 Geom.[13]), eller FC perpendikular til CD; og naar CD antages som Radius, er FC = tang.y = tang.(½ C + ½ B) (§.4). Nu er FC parallel med DE (Konstr.); og Vexelvinklerne [14] ligestore FCD = CDE (§.60 Geom.[15]); og naar CD er Radius, er DE = tang.n = tang.(½ C - ½ B). Fremdeles da DE er parallel med FC saa er Δ BFC ~ ΔBDE, og BF : BD = FC : DE (§.148 Geom.[15]); men BF = AB + AC og BD = AB - AC efter hvad som forhen er beviist; derfor AB + AC : AB - AC = tang.(½C + ½B) : tang.(½C - ½B).

Eksempel. AB = 693 Fod. AC = 539 Fod. A = 41^0 37´.

AB = 693	A + B + C = 179^0.60´
AC = 539	A = 41. 37
AB + AC = 1232 Fod	C + B = 138.23.
AB - AC = 154 Fod	½ C + ½ B = 69^0.11´.30´´

1232 : 154 = tang.69^0.11´.30´´ : tang. ½ C - ½ B.

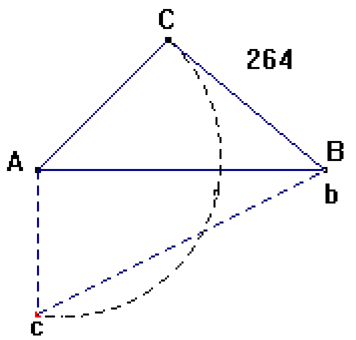
log.154 = 2.1875207
log.tang.69^0.11´.30´´ = 10.4201812
12.6077019
log.1232 = 3.09006107
log.tang.(½ C - ½ B) = 9.5170912
½ C - ½ B = 13^0 12´.26´´
½ C + ½ B = 69. 11. 30
C = 87. 23. 56
B = 50. 59. 4

Saaledes har man fundet de tvende Vinkler C og B. Vil man videre end finde den tredie Side BC, da skeer det ved følgende Forhold:

Sin.B : AC = sin.A : BC (§.22)
sin.50^0.59´.4´´ : 539 = sin.41^0.37´: BC
log.539 = 2.7315888
log.sin.41^0.37 = 9.8222621
12.5538509
log.sin.50^0.59´.4´´ = 9.8904071
log.BC = 2.6634438
BC = 460,73 Fod.

§ 27

Tab.17.
Fig.264.



Naar der udi en Triangel ABC gives tvende Sider AB og AC, og den indbefattede Vinkel BAC, saa kan man endnu paa en anden og følgende Maade finde de tvende øvrige Vinkler B og C.

1. Som den mindste Side AC er til den største Side AB, saaledes Sinus Totus til Tangens af en Vinkel c.

2. Fra denne Vinkel drager man 45^0, og Forskiellen $x = c - 45^0$.

3. Fremdeles: som Sinus Totus til Tangens af $c - 45^0$ eller Tangens x, saaledes Tangens af de søgte Vinklers halve Summe til Tangens af deres halve Difference.

4. Af den halve Summe og den fundne halve Difference findes den store Vinkel C og den mindre B.

F.Ex., AB = 693 Fod, AC = 539 Fod, $A = 41^0.37'$, saa er AB + AC = 1232 Fod; AB - AC = 154 Fod; $\frac{1}{2} C + \frac{1}{2} B = 69^0\, 11'.30''$ (§.26 Exemp.)

$$AC : AB = R : \text{tang.}c$$

$$539 : 693 = \text{sin.tot.} : \text{tang.}c$$

$$\text{log.sin.tot.} + \text{log.}693 = 12.8407332$$

$$\underline{\text{log.}539 = \;\; 2.7315888}$$

$$\text{log.tang.}c = 0.1091444$$

$$c = 52^0.\, 7'.30$$

$$\underline{45^0 = 45^0}$$

$$x = c - 45^0 = 7^0.7'.30$$

$$R : \text{tang.}(c - 45^0) = \text{tang.}(\tfrac{1}{2} C + \tfrac{1}{2} B) : \text{tang.}(\tfrac{1}{2} C - \tfrac{1}{2} B)$$

$$\text{Sin.tot.} : \text{t.}7^0\, 7'.30'' = \text{t.}69^0\, 11'.30 : \text{t.}(\tfrac{1}{2} C - \tfrac{1}{2} B)$$

$$\text{Log.tang.}69^0.11'30'' = 10.4201812$$

$$\underline{\text{Log.tang. } 7 . 7 . 30 \;\; = \;\; 9.0969090}$$

$$\text{Log.tang. } (\tfrac{1}{2} C - \tfrac{1}{2} B) = \;\; 9.5170902$$

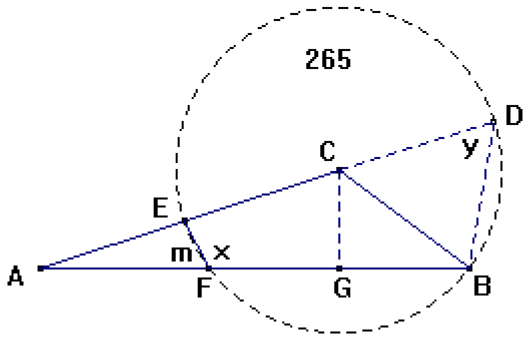
$$\tfrac{1}{2} C - \tfrac{1}{2} B = 18^0\, 12'.\, 26''$$

Ganske saaledes , som forhen er fundet.

Beviis………

§ 28

Fig.265.



Naar der i en Triangel ABC gives alle trende Sider AB, BC og AC, da at finde Vinklerne.

1. Fra toppen af den første Vinkel C nedlader man paa den modstaaende største Side AB en Perpendikular CG, og fra C, som Center, mod den mindste Side BC, som Radius, beskrives en Cirkel.

2. Man opsætter følgende Forhold: som den største Side AB til Summen af de andre Sider AC + CB; saaledes disse Siders Forskiel AC - CB til Stykket uden for Cirklen AF.

3. Dette Stykke AF tages fra AB, saa har man BF; og ½ BF = FG = BG (§ 108 Geom.[17]); og AG = AF + FG = AF + ½ BF.

4. I den retvinklede Triangel BCG findes Vinkelen B ved følgende Forhold: CB : BG = R : cos.B (§ 14).

5. Iden retvinklede Triangel AGC søges Vinkelen A ved dette Forhold: AC : AG = R : cos.A (§ 14).

6. Endeligen findes BCA = 180 - (A + B) (§.67 Geom.[18])

Beviis. Det som i denne Opløsning behøver Beviis, er at AB : AC + CB = AC - CB : AF. Nu er AD = AC + CD = AC + CB; og AE = AC - CE = AC - CB. Fremdeles x = ½ EDB og y = ½ BFE (§ 122 Geom.[19]) ; altsaa x + y = ½ EDB + ½ BFE = 180^0 (§ 20 Geom.[20]) = m + x (§ 31 Geom.[21]), og naar man fradrager x, bliver y = m. End videre er Vinkelen A tilfælledes for ΔABD og ΔAEF; altsaa $\Delta ABD \sim \Delta AEF$ (§ 149 Geom.[22]) og AB : AD = AE : AF, eller AB : AC + CB = AC - CB : AF.

Exempel. AC = 354 Fod; BC = 346 Fod og AB = 625 Fod.

AC = 354 Fod	AC = 354 Fod
BC = 346	BC = 346
AC + BC = 700 Fod	AC - BC = 8 Fod

AB : AC + BC = AC - BC : AF
625 : 700 = 8 : AF
log.8 = 0.9030900
log.700 = 2.8450980
3.7481880
log.625 = 2.7958800
log.AF = 0.9523080
AF = 8,96 Fod
AB = 625 Fod
AF = 8,96
BF = 616.04
BG = ½ BF = 308,02
AG = AF + ½ BF = 316,98
CB : BG = R : cos.B
346 : 308,02 = sin.tot : cos.B
log.sin.tot. + log.308,02 = 12.4885789
log.346 = 2.5390761
log.cos.B = 9.9495028
B = 27^0. 5´.52

AC : AG = R : cos.A
354 : 316,98 = sin.tot. : cos.A
log.sin.tot. + log.316,98 = 12.5000319
log.354 = 2.5490033
log.cos.A = 9.9520286
A = 26^0. 16´.14

$$
\begin{aligned}
B &= 27.\ \ 5.\ 52 \\
\underline{A} &\underline{= 26.\ 32.\ 14} \\
A + B &= 53.\ 32.\ 06 \\
\underline{C + A + B} &\underline{= 179.\ 59.\ 60} \\
C &= 126.27.54
\end{aligned}
$$

Noter:

1) Chorde: Et linjestykke der forbinder to punkter på en cirkelperiferi.
2) Perpendikular: En linje der står vinkleret på en anden linje.
3) § 108 Geom:
Naar Diameteren DE er Perpendikular til Chorden AB, saa deler den Chorden AB i tvende lige Dele, AF = FB……
4) § 121 Geom:
Vinkelen ved Centeret ACB er dobbelt saa stor som Vinklen ved Peripherien ADB, naar de begge staae paa samme Bue AB……
5) Målestoksforhold:
1 Fod = 10 decimaltommer = 100 decimallinier = ½ Alen.1 Alen = 62.8 cm.
6) Vinkelmål: En hel cirkel deles i 360^0.
Hver grad deles i 60 bueminutter (skrives 60´) og hvert bueminut deles i 60 buesekunder (skrives 60´´).
F.eks. betyder $20^0\ 13´45\ ´´$: 20 grader, 13 minutter og 45 sekunder
Eksempel på omregning:

$$20^0\ 13´\ 45´´ = 20 + 13 / 60 + 45 / 60^2 = 22.2291667^0.$$

Tilbageskrivningen af 22.2291667^0 ser sådan ud:

22.2291667 - 22 = 0.2291667 (*træk heltalsværdien fra)*
0.2291667H60 = **13**.75000 *(multiplicer med 60)*
13.75000 - 13 = 0.7500 *(træk heltalsværdien fra)*
0.7500 H 60 = **45**.000 *(multiplicer med 60)*

7) Se <u>Beregning med logaritmer</u>
8) § 67 Geom:
… Naar der i en Triangel ABC gives tvende Vinkler A og B, saa findes den tredje Vinkel C ved at drage de tvende givne Vinklers Summa fra tvende rette Vinkler…..
9) § 66 Geom:
Naar i enhver Triangel ABC den ene Side AB forlænges til D, er den udvendige Vinkel DBC saa stor som de tvende indvendige og modstaaende Vinkler A + C, og alle Vinkler tilsammentagne er saa store som tvende rette A + C + y = 2 R. …….
10) § 14 Geom:
Alle Radier ere lige store i samme Cirkel,……….
11) § 65 Geom:
Igiennem et givet Punkt A at drage en Linie AE parallel med en given Linie CD. ……
12) § 39 Geom:
Udi enhver ligebenet Triangel ABC ere Vinklerne ved Grundlinien AB lige store, A = B.
13) § 122 Geom:
Enhver Vinkel ADB, hvis Top D er i Omkredsen af en Cirkel, har til sit Maal den halve Bue AB, paa hvilken den staaer, eller ADB = ½ AB. ……..

14) Vexelvinkel: Ensliggende vinkler ved en linie der skærer ti parallelle linier.
15) § 60 Geom:
Naar tvende Linier AB og CD ere parallele, og skiæres af den tredie Linie HK, saa er 1) Vexelvinklerne lige store, x = y …….
16) § 148 Geom:
Naar udi tvende Triangler ABC og DEF alle Vinklerne ere lige store, A = D, B = E og C = F, saa ere eensbeliggende Sider i Forhold, det er:

AB : AC = DE : DF
AB : BC = DE : EF
AC : CB = DF : FE. …..

17) § 108 Geom:
Naar diameteren DE er perpendikular til Chorden AB, saa Deler den Chorden AB i tvende lige Dele, Af = FB. ……
18) § 67 Geom:
Naar der i en Triangel ABC gives tvende Vinkler A og B, saa findes den tredje Vinkel C ved at drage de tvende givne Vinklers Summa fra tvende rette Vinkler…..
19) § 122 Geom:
Enhver Vinkel ADB, hvis Top D er i Omkredsen af en Cirkel, har til sit Maal den halve Bue AB, paa hvilken den staaer, eller ADB = ½ AB. ……..
20) § 20 Geom:
….har man deelt hele Cirklens Omkreds i 360^0……
21) § 31 Geom:
Naar paa en Linie AB staaer den anden Linie CD, saa ere begge de jevnsides Vinkler ACD og DCB tilsammentagne tvende rette Vinkler eller 180 Grader. ….
22) § 149 Geom:
At naar tvende Triangler blot have tvende Vinkler lige store, saa er de ligedannede,…..